

Całka oznaczona - dalsze zastosowania geometryczne

Dalsze zastosowania geometryczne całek oznaczonych

Oprócz podanych wcześniej zastosowań, całki oznaczone można również wykorzystać do obliczania długości łuku krzywej, objętości oraz pola powierzchni bryły obrotowej otrzymanej w wyniku obrotu danej krzywej wokół osi Ox . Dodatkowo, krzywą można określać w różny sposób. Wyróżnimy tutaj trzy przypadki.

I. Krzywa dana równaniem $y = f(x)$

Niech funkcja f będzie ciągła w przedziale $\langle a, b \rangle$. Długość łuku krzywej $y = f(x)$ dla $x \in \langle a, b \rangle$, objętość bryły obrotowej oraz pole powierzchni obrotowej utworzonych przez obrót tej krzywej wokół osi Ox wyrażają się wzorami:

Długość łuku

$$(5) \quad l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx,$$

Objętość bryły obrotowej

$$(6) \quad |V| = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx,$$

Pole powierzchni obrotowej

$$(7) \quad |S| = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx.$$

W przypadku wzoru na długość łuku oraz pole powierzchni obrotowej zakładamy dodatkowo, że funkcja f ma ciągłą pochodną w przedziale $\langle a, b \rangle$.

Przykład. Obliczyć długość łuku krzywej $y = x^2$ dla $0 \leq x \leq \sqrt{2}$.

Rozwiązanie.

W przykładzie tym oprócz wzoru (5) zastosujemy również wzór wykorzystywany przy obliczaniu pewnego typu całek z funkcji niewymiernych, a mianowicie:

$$(8) \quad \int \sqrt{x^2 + k} \, dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + k} + \frac{1}{2} k \ln \left| x + \sqrt{x^2 + k} \right| + C.$$

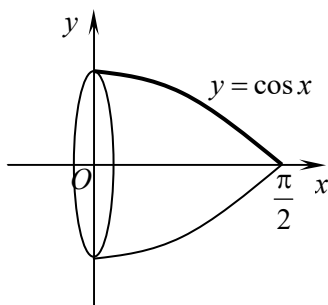
Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} l &= \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx = \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + (2x)^2} \, dx = \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4x^2} \, dx = 2 \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}} \, dx = \\ &= 2 \left[\frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \ln \left| x + \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}} \right| \right]_0^{\sqrt{2}} = \\ &= \left(\sqrt{2} \cdot \sqrt{2 + \frac{1}{4}} + \frac{1}{4} \ln \left| \sqrt{2} + \sqrt{2 + \frac{1}{4}} \right| \right) - \left(0 \cdot \sqrt{0 + \frac{1}{4}} + \frac{1}{4} \ln \left| 0 + \sqrt{0 + \frac{1}{4}} \right| \right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{4}\ln\left(\sqrt{2} + \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{4}\ln\frac{1}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{4}\left[\ln\left(\sqrt{2} + \frac{3}{2}\right) - \ln\frac{1}{2}\right] = \frac{3}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{4}\ln(2\sqrt{2} + 3)$$

Przykład. Obliczyć objętość bryły obrotowej oraz pole powierzchni obrotowej powstałych przez obrót dookoła osi Ox krzywej $y = \cos x$ dla $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Rozwiązanie.



Rys. 7.

Ponieważ

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{1}{2} \int dx = \frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{1}{2} x + C,$$

zatem

$$|V| = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x = \pi \left[\frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{1}{2} x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi^2}{4}.$$

Obliczamy teraz pole powstałej powierzchni obrotowej. Stosujemy wzór (7) i (8):

$$\begin{aligned} |S| &= 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{1 + \sin^2 x} dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right| = \\ &= 2\pi \int_0^1 \sqrt{1 + t^2} dt = 2\pi \left[\frac{1}{2} t \sqrt{1 + t^2} + \frac{1}{2} \ln \left| t + \sqrt{1 + t^2} \right| \right]_0^1 = \pi \left[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}) \right]. \end{aligned}$$

II. Krzywa określona równaniami parametrycznymi

Jeżeli funkcje x i y są funkcjami ciągłymi tej samej zmiennej t :

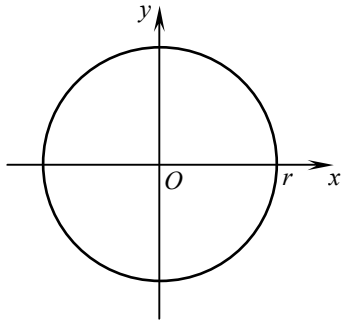
$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

gdzie t przybiera wartości z pewnego przedziału T , to mówimy, że funkcje te określają krzywą na płaszczyźnie. Powyższe równania nazywamy *równaniami parametrycznymi* tej krzywej, a zmienną t nazywamy *parametrem*.

Poniższe rysunki przedstawiają przykładowe krzywe określone równaniami parametrycznymi. W równaniach tych r , a , b są pewnymi dodatnimi stałymi.

Okrąg

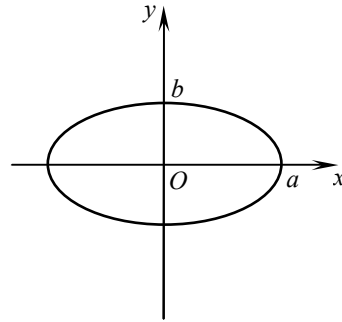
$$\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases}, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle$$



Rys. 8. Okrąg

Elipsa

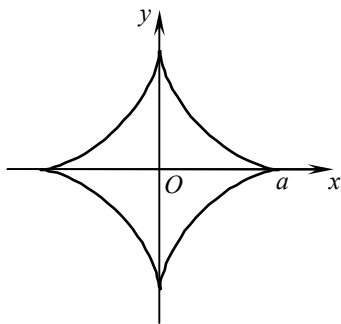
$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$



Rys. 9. Elipsa

Asteroida

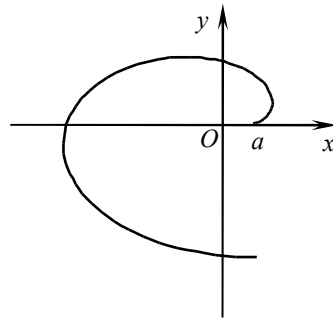
$$\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$



Rys. 10. Asteroida

Ewolwenta koła

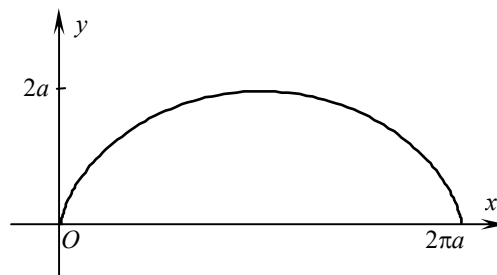
$$\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t) \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{cases}, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$



Rys. 11. Ewolwenta koła

Cykloida

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle$$



Rys. 12. Cykloida

Założmy, że dana jest krzywa określona równaniami parametrycznymi $x = x(t)$, $y = y(t)$, gdzie funkcje x i y są ciągłe dla $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$. Wówczas zachodzą następujące wzory:

Pole obszaru

- jeżeli $x(t)$ jest funkcją rosnącą, to

$$(9) \quad |D| = \int_{\alpha}^{\beta} |y(t)| x'(t) dt,$$

- jeżeli $x(t)$ jest funkcją malejącą, to

$$(10) \quad |D| = - \int_{\alpha}^{\beta} |y(t)| x'(t) dt,$$

gdzie D jest obszarem ograniczonym daną krzywą, osią Ox oraz prostymi $x = a$ i $x = b$ (gdzie $a = x(\alpha)$, $b = x(\beta)$), a dodatkowo funkcja x ma w przedziale $\langle \alpha, \beta \rangle$ ciągłą pochodną.

Długość łuku

$$(11) \quad l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

przy założeniu, że funkcje x i y mają ciągłe pochodne w przedziale $\langle \alpha, \beta \rangle$ oraz $[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 > 0$ dla każdego t z tego przedziału.

Objętość bryły obrotowej

- jeżeli $x(t)$ jest funkcją rosnącą, to

$$(12) \quad |V| = \pi \int_{\alpha}^{\beta} [y(t)]^2 x'(t) dt,$$

- jeżeli $x(t)$ jest funkcją malejącą, to

$$(13) \quad |V| = -\pi \int_{\alpha}^{\beta} [y(t)]^2 x'(t) dt,$$

gdzie V jest bryłą obrotową otrzymaną przez obrót dookoła osi Ox trapezu krzywoliniowego ograniczonego daną krzywą, osią Ox oraz prostymi $x = a$ i $x = b$ (gdzie $a = x(\alpha)$, $b = x(\beta)$), a dodatkowo funkcja x ma w przedziale $\langle \alpha, \beta \rangle$ ciągłą pochodną.

Pole powierzchni obrotowej

$$(14) \quad |S| = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |y(t)| \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt,$$

gdzie S jest powierzchnią obrotową otrzymaną w wyniku obrotu danej krzywej wokół osi Ox oraz przy założeniu, że funkcje x i y mają ciągłe pochodne w przedziale $\langle \alpha, \beta \rangle$ oraz $[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 > 0$ dla każdego t z tego przedziału.

Przykład. Obliczyć długość łuku asteroidy $x(t) = a \cos^3 t$, $y(t) = a \sin^3 t$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ oraz pole obszaru ograniczonego tą asteroidą.

Rozwiązanie. Patrząc na rysunek asteroidy (rysunek 10) widzimy, że zbudowana jest ona z czterech części (łuków) o takiej samej długości. Możemy zatem obliczyć długości łuku asteroidy leżącego w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych (dla $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$), a następnie wynik pomnożyć przez 4.

Wyznamy najpierw pochodne funkcji x i y :

$$x'(t) = -3a \cos^2 t \sin t, \quad y'(t) = 3a \sin^2 t \cos t. \text{ Zatem}$$

$$\begin{aligned} l &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-3a \cos^2 t \sin t)^2 + (3a \sin^2 t \cos t)^2} dt = \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t} dt = 12a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2 t \cos^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t)} dt = \\ &= 12a \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin t \cos t| dt. \end{aligned}$$

Ponieważ $\sin t \cos t \geq 0$ dla każdego $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ dlatego

$$l = 12a \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin t \cos t| dt = 12a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t dt = \left| \begin{array}{l} \sin t = p \\ \cos t dt = dp \end{array} \right| = 12a \int_0^1 p dp = 12a \left[\frac{1}{2} p^2 \right]_0^1 = 6a.$$

Przechodzimy teraz do obliczenia pola obszaru ograniczonego asteroidą. Podobnie, jak to miało miejsce wyżej, również w tym przypadku łatwo stwierdzić, że nasz obszar składa się z czterech przystających obszarów. Zatem jego pole obliczymy jako przemnożone przez 4 pole ćwiartki asteroidy otrzymanej dla $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$. Ponieważ funkcja cosinus jest funkcją malejącą w przedziale $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$, więc również funkcja $x(t) = a \cos^3 t$ jest w tym przedziale malejąca. Zastosujemy zatem wzór:

$$|D| = - \int_{\alpha}^{\beta} |y(t)| x'(t) dt.$$

Podstawiając do wzoru oraz wykorzystując fakt, że $\sin^3 t \geq 0$ dla każdego $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ otrzymujemy:

$$|D| = -4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} |a \sin^3 t| (-3a \cos^2 t \sin t) dt = 12a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos^2 t dt.$$

Obliczamy najpierw całkę nieoznaczoną:

$$I = \int \sin^4 t \cos^2 t dt = \int \sin^4 t (1 - \sin^2 t) dt = \int \sin^4 t dt - \int \sin^6 t dt.$$

Obie otrzymane całki obliczamy ze wzoru rekurencyjnego:

$$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx.$$

$$\int \sin^4 t dt = -\frac{1}{4} \sin^3 t \cos t + \frac{3}{4} \int \sin^2 t dt = -\frac{1}{4} \sin^3 t \cos t + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{2} \sin t \cos t + \frac{1}{2} \int dt \right) =$$

$$= -\frac{1}{4} \sin^3 t \cos t - \frac{3}{8} \sin t \cos t + \frac{3}{8} t + C,$$

$$\int \sin^6 t dt = -\frac{1}{6} \sin^5 t \cos t + \frac{5}{6} \int \sin^4 t dt = -\frac{1}{6} \sin^5 t \cos t +$$

$$+ \frac{5}{6} \left(-\frac{1}{4} \sin^3 t \cos t - \frac{3}{8} \sin t \cos t + \frac{3}{8} t \right) + C =$$

$$= -\frac{1}{6} \sin^5 t \cos t - \frac{5}{24} \sin^3 t \cos t - \frac{5}{16} \sin t \cos t + \frac{5}{16} t + C.$$

Podstawiając obliczone całki do całki I oraz redukując wyrazy podobne otrzymamy

$$I = \frac{1}{6} \sin^5 t \cos t - \frac{1}{24} \sin^3 t \cos t - \frac{1}{16} \sin t \cos t + \frac{1}{16} t + C.$$

Ostatecznie mamy

$$|D| = 12a^2 \left[\frac{1}{6} \sin^5 t \cos t - \frac{1}{24} \sin^3 t \cos t - \frac{1}{16} \sin t \cos t + \frac{1}{16} t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{8} \pi a^2.$$

III. Krzywa we współrzędnych biegunowych

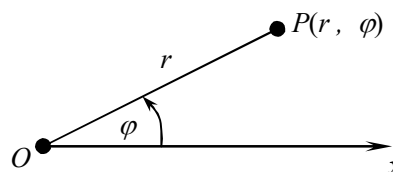
Przed podaniem wzorów związanych z zastosowaniem całek oznaczonych przedstawimy podstawowe wiadomości dotyczące układu współrzędnych biegunowych oraz jednego ze sposobu określenia krzywych w układzie biegunowym.

Niech na płaszczyźnie zorientowanej (płaszczyźnie na której został ustalony dodatni kierunek obrotu) dany będzie punkt O zwany *biegunem* oraz półprosta Ox o początku w punkcie O zwana *osią biegunową*. Mówimy wówczas, że na płaszczyźnie został określony *układ współrzędnych biegunowych*. Każdemu punktowi P (różnemu od O) w tym układzie można przyporządkować parę liczb (r, φ) , gdzie r jest odległością punktu P od bieguna O , a φ jest miarą kąta, jaki tworzy promień wodzący punktu P z osią biegunową. Liczby te nazywamy *współrzędnymi biegunowymi* punktu P (rys. 13). Punkтови O przypisana jest liczba $r = 0$, natomiast miara φ jest nieokreślona (w niektórych źródłach przyjmuje się $\varphi = 0$).

Założmy teraz, że dana jest zależność

$$r = f(\varphi),$$

gdzie f oznacza funkcję zmiennej φ . Zależność ta (przy pewnych założeniach o funkcji f) określa krzywą w układzie biegunowym. Wykres takiej krzywej można sporządzić na podstawie kilku konkretnych punktów – przyjmując określoną wartość współrzędnej φ wyznaczamy na podstawie zależności $r = f(\varphi)$ odległość szukanego punktu od bieguna.



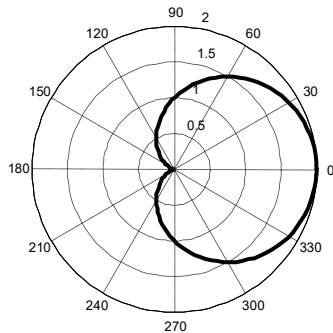
Rys. 13. Współrzędne biegunowe punktu

Podamy teraz kilka przykładów krzywych w układzie biegunowym:

Kardioida

$$r = a(1 + \cos \varphi), \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Wykres dla $a = 1$:

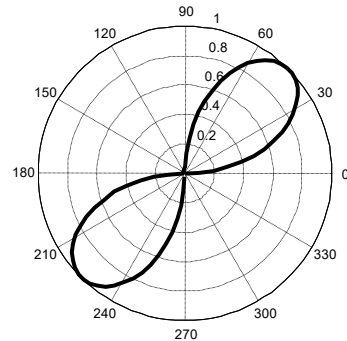


Rys. 14. Kardioida

Rozeta dwulistna

$$r = a \sin 2\varphi$$

Wykres dla $a = 1$:

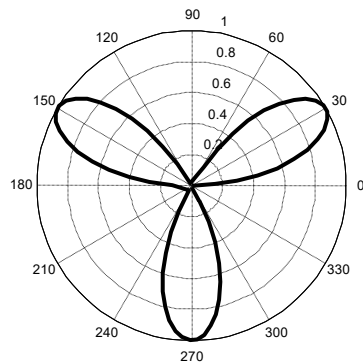


Rys. 15. Rozeta dwulistna

Rozeta trójlistna

$$r = a \sin 3\varphi.$$

Wykres dla $a = 1$:

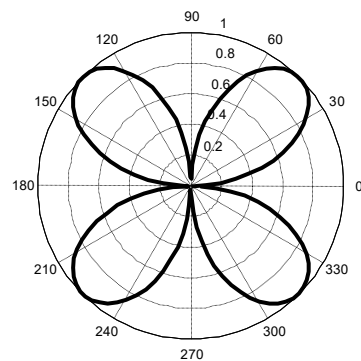


Rys. 16. Rozeta trójlistna

Rozeta czterolistna

$$r = a |\sin 2\varphi|, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

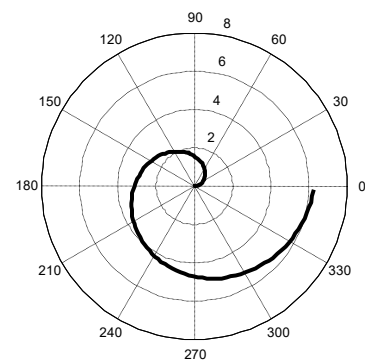
Wykres dla $a = 1$:



Rys. 17. Rozeta czterolistna

Spirala Archimedesesa

$$r = \varphi \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

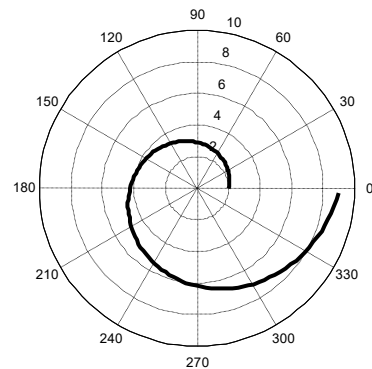


Rys. 18. Spirala Archimedesesa

Spirala wykładnicza

$$r = ae^{m\varphi}, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Wykres dla $a = 2$ i $m = 0,25$:



Rys. 19. Spirala wykładnicza

Niech teraz w układzie biegunowym dana będzie krzywa AB określona równaniem

$$r = f(\varphi), \quad \alpha \leq \varphi \leq \beta \quad (\alpha \geq 0, \beta - \alpha \leq 2\pi),$$

gdzie funkcja f jest ciągła i nieujemna w przedziale $\langle \alpha, \beta \rangle$. Wówczas zachodzą następujące wzory:

Pole obszaru

$$(15) \quad |D| = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\varphi)]^2 d\varphi,$$

gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywą AB i dwoma promieniami wodzącymi OA i OB tworzącymi z osią biegunową odpowiednio kąty α i β .

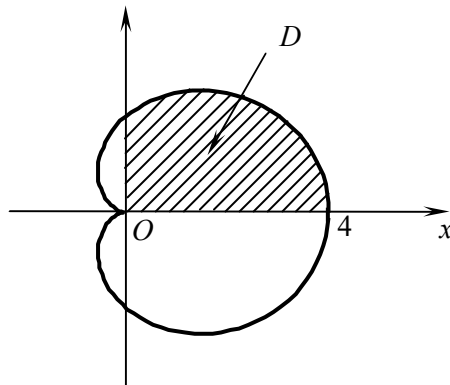
Długość łuku

$$(16) \quad l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f(\varphi)]^2 + [f'(\varphi)]^2} d\varphi,$$

gdzie funkcja f ma ciągłą pochodną w przedziale $\langle \alpha, \beta \rangle$.

Przykład. Obliczyć pole obszaru płaskiego ograniczonego kardioidą $r = 2(1 + \cos \varphi)$, gdzie $\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$.

Rozwiązanie. Obszar, którego pole chcemy obliczyć przedstawiony jest na rysunku 20.



Rys. 20.

Korzystamy z odpowiedniego wzoru

$$\begin{aligned} |D| &= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\varphi)]^2 d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4(1 + \cos \varphi)^2 d\varphi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2\cos \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi = \\ &= 2 \left[\varphi + 2\sin \varphi + \frac{1}{2} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{1}{2} \varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = [3\varphi + 4\sin \varphi + \sin \varphi \cos \varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2} \pi + 4 \end{aligned}$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Obliczyć długość łuku krzywej:

$$30^*. f(x) = \ln x \quad \text{dla} \quad \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}, \quad 31. f(x) = \arcsin x + \sqrt{1-x^2} \quad \text{dla} \quad -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}.$$

Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót dookoła osi Ox krzywych o równaniach:

$$32. y^2 = 2px, \quad 0 \leq x \leq 4, \quad 33. y = \operatorname{tg} x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4},$$

$$34. y = 2x - x^2, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad 35. y = \ln x, \quad 1 \leq x \leq e^2.$$

$$36. y = xe^x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Obliczyć pole powierzchni powstałej przez obrót dookoła osi Ox krzywych o równaniach:

$$37. y = \sqrt{x+2} \quad \text{dla} \quad 1 \leq x \leq 2, \quad 38. y = e^x \quad \text{dla} \quad 0 \leq x \leq \ln 3,$$

Obliczyć pole obszaru płaskiego ograniczonego liniami ($a, b > 0$):

$$39. x(t) = a(t - \sin t), \quad y(t) = a(1 - \cos t), \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle,$$

$$40. x(t) = a \cos t, \quad y(t) = b \sin t, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle,$$

$$41. r(\varphi) = a, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle,$$

$$42. r(\varphi) = ae^{m\varphi}, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle,$$

$$43. r(\varphi) = \sin 3\varphi, \quad \varphi \in \left\langle 0, \frac{\pi}{3} \right\rangle.$$

Obliczyć długość łuku krzywych o równaniach:

$$44. x(t) = a(\cos t + t \sin t), \quad y(t) = a(\sin t - t \cos t), \quad t \in \langle 0, \pi \rangle,$$

$$45. x(t) = a \cos t, \quad y(t) = a \sin t, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle,$$

$$46. r(\varphi) = a\varphi, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle,$$

$$47^*. r(\varphi) = a(1 + \cos \varphi), \quad \varphi \in \langle 0, \pi \rangle.$$

Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót dookoła osi Ox krzywych o równaniach:

$$48. x(t) = a \cos^3 t, \quad y(t) = a \sin^3 t, \quad t \in \langle 0, \pi \rangle, \quad 49. x(t) = a \cos t, \quad y(t) = a \sin t, \quad t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle.$$

Opracowanie:

dr Igor Kierkosz

dr hab. Volodymyr Sushch